Sujets oraux CCINP

Ce document présente dix sujets proposés par le CCINP comme exemples pour les oraux de mathématiques avec usage de python. Pour chacun des indications sont fournies pour vous aider à les résoudre.

Table des matières

Exercice 1.

Soit ρ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. a) Écrire en langage Python une fonction permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ appelés a et b à l'aide d'une boucle. La fonction renvoyant un scalaire pourra avoir pour entête : `def mon_prod(a,b)`.

   b) Comparer les résultats avec le produit scalaire `numpy.vdot(a,b)` fourni par la bibliothèque `numpy` sur les vecteurs $a = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que ρ est un automorphisme orthogonal direct.

3. Montrer que $\omega = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est invariant par ρ. En déduire la nature de l'isométrie.

4. Montrer que le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à ω.

5. Donner les éléments caractéristiques de cette transformation.

Indications :

1. a) Classique calcul de somme à l'aide d'une boucle. (Comme rien n'est précisé, $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique.)

   b) Penser à charger la bibliothèque `numpy`.
   Un vecteur se défini alors comme un tableau : `numpy.array([1,2,3])` par exemple.

2. Il y a deux choses à montrer : d'une part que la matrice est orthogonale et d'autre part le caractère direct.

3. Le vecteur ω est invariant par ρ signifie que $\rho(\omega) = \omega$ ou encore $\rho(\omega) = M\omega$.

4. L'orthogonalité se vérifie à l'aide d'un calcul de produit scalaire.

5. Il reste ici à déterminer l'angle de la rotation.

Exercice 2.

On considère la surface (S) d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 = 0.$$

1. Écrire en langage Python une fonction permettant de renvoyer `True` si le point M passé en paramètre appartient à la surface (S). La fonction renvoyant un booléen pourra avoir pour entête `def appartient(M)` où M peut être vu comme une liste ou un triplet ou sous la forme de son choix, le choix est laissé au candidat.
2. Le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ appartient-il à (S) ?
3. On pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1$ avec x, y et z des réels
   a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.
   b) Calculer le gradient de f au point (x_0, y_0, z_0).
4. Déterminer l'ensemble des points non réguliers de (S).
5. Donner l'équation cartésienne du plan tangente à (S) à un point régulier de (S) dont les coordonnées seront notées (x_0, y_0, z_0).
6. Déterminer l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = a$ dans le cas $a = 1$ ou $a = -1$.

Indications :

1. Un point appartient à la surface si ses coordonnées vérifient l'équation.
2. Utiliser la fonction que l'on vient d'écrire.
3. a) Ne pas chercher compliqué, c'est toujours le même argument avec les fonctions de plusieurs variables.
   b) Il faut calculer les trois dérivées partielles.
4. Utiliser la définition d'un point singulier puis résoudre le système par substitution.
5. Méthode classique de cours. Penser à utiliser le fait que le point appartient à la surface pour simplifier le résultat obtenu.
6. Un point appartient à l'intersection s'il vérifie les deux équations : il s'agit donc d'un système à résoudre.

Exercice 3.

Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi\,;\pi],\ f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

1. Tracer à la main en justifiant la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$.
2. a) Calculer, pour tout entier naturel non nul n, les coefficients de Fourier b_n de la fonction f.
   b) Calculer le coefficient de Fourier a_0.
   c) Calculer les coefficients de Fourier a_n pour n un entier naturel non nul à l'aide de deux intégrations par parties.
3. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$,

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

4. Déduire de la question précédente que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

5. a) Illustrer à l'aide du langage Python le résultat précédent en écrivant une fonction d'en-tête `sommeP(N)` prenant en paramètre un entier naturel N et renvoyant la valeur de la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.
   Pour calculer $(-1)^k$, on prendra garde d'utiliser la bibliothèque `math` *et* `math.pow(-1, k)`.
   b) Calculer les sommes partielles au rang 10, 100 et 1 000 et comparer avec $\dfrac{\pi^2}{12}$.
   On rappelle que la valeur de π peut-être obtenue à l'aide de la commande `math.pi`.

Indications :

1. Réfléchir à la « forme » de la courbe puis prendre quelques valeurs particulières bien choisies.
2. a) La formulation des trois questions laisse à penser qu'il faut utiliser ici la parité.
   b) Conséquence directe de la définition de a_0 et d'un simple calcul.
   c) Penser à justifier les IPP + dessiner un cercle trigonométrique pour calculer certaines valeurs.
3. C'est une égalité de fonctions donc appliquer le théorème de Dirichlet après avoir vérifié ses hypothèses.
4. Choisir la valeur de x adéquate dans l'égalité précédente pour avoir le terme voulu dans la somme.
5. a) Calcul de somme classique à l'aide d'une boucle.
   b) Appeler la fonction précédente avec les différentes valeurs de N.

Exercice 4.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

1. Écrire en Python une fonction `somme` prenant en paramètre un entier naturel non nul `n` et renvoyant la valeur de S_n.
2. Donner la valeur de S_{10}, de S_{100} et de $S_{1\,000}$.
3. Convergence de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
   a) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}}$.
   b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\sqrt{3} - 1$.

Indications :

1. Calcul habituel de somme.
2. Utiliser la fonction précédente.
3. a) Penser à la continuité de la fonction à intégrer puis chercher une primitive directement.
   b) La question précédente donne envie de faire apparaître une somme de Riemann.

Exercice 5.
Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A(a)$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a le système linéaire $A(a)X = B$ admet une unique solution.
3. On s'intéresse au système différentiel suivant, où les inconnues sont x, y, z, w fonctions de t :

$$(S) \colon \begin{cases} x' = x + 0{,}5y + 2{,}5z + w \\ y' = 2{,}5x - y + z + 2{,}5w \\ z' = -2{,}5z + w \\ w' = -z \end{cases}$$

   a) On note A la matrice associée au système (S). Montrer qu'il existe deux matrices P et D avec P inversible et D diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$. On déterminera ces matrices à l'aide de Python, on pourra pour cela utiliser les fonctions `numpy.linalg.eig` et `numpy.diag` de la bibliothèque `numpy`.

   b) Déterminer à la main la solution Y_0 du système différentiel $Y' = DY$ telle que $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   c) Écrire en Python une fonction `solution(t)` prenant en paramètre un nombre réel `t` et renvoyant la valeur de la solution de (S) en `t` telle que $P^{-1}X = Y_0$.

Indications :

1. Pas d'astuce de calcul, développer deux fois selon la dernière ligne.
2. Traduire cette condition à propos de la matrice $A(a)$ et faire le lien avec la question précédente.
3. a) Penser à charger les bibliothèques et comprendre ce que renvoie la fonction `eig`.

   b) Écrire Y sous forme d'un vecteur de quatre fonctions, on est alors ramené à des équations différentielles très simples. Ne pas oublier la condition initiale.

   c) Pour effectuer un produit matriciel, on peut utiliser la fonction `dot` de `numpy`.

Exercice 6.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t-1}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2+3}{t-1} \end{cases}$$

On pose $M(t)$ le point de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$.

1. Donner les ensembles de définition des fonctions x et y.
2. Étudier la courbe paramétrée Γ.
3. Justifier l'existence d'asymptotes verticales et horizontales et préciser leur équation respective.
4. a) Définir en Python les fonctions `abscisse(t)` et `ordonnee(t)` où t est le paramètre et renvoyant respectivement la valeur de $x(t)$ et de $y(t)$.
   b) Tracer la courbe $t \mapsto \dfrac{y(t)}{x(t)}$ sur l'intervalle $I_1 = \left[\dfrac{2}{3}\,; 1\right[$, la commande `linspace` pourra être utilisée.
   c) Tracer la courbe $t \mapsto \dfrac{y(t)}{x(t)}$ sur l'intervalle $I_2 = \left]1\,; \dfrac{4}{3}\right]$, la commande `linspace` pourra être utilisée.
   d) Que constate-t-on ? Justifier votre réponse par le calcul.
   e) Tracer la courbe $t \mapsto y(t) - 8x(t)$ sur les intervalles I_1 et I_2.
   f) Que constate-t-on ? En déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe. Vous démontrerez votre conjecture.

Indications :

1.
2. Cela signifie dresser le tableau de variations commun.
3. À l'aide d'un schéma si nécessaire, voir ce que cela signifie en terme de limites.
4. a)
   b) Penser à importer `numpy` et `matplotlib.pyplot` pour pouvoir utiliser `linspace` et `plot`. Savoir chercher l'aide de ces fonctions si besoin. Faire attention à la valeur interdite.
   c)
   d) Calcul très simple de limite.
   e) Comme les deux autres tracés.
   f) Faire un schéma si besoin pour traduire ce résultat en terme d'asymptote.

Exercice 7.

1. Rappeler la dimension et la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On note : $P_0 = 1$; $P_1 = X + 1$ et $P_2 = (X + 2)^2$. Vérifier que $\mathscr{B}$ la famille constituée de ces trois polynômes est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, on définit $\varphi(P, Q)$ comme étant $\displaystyle\sum_{k=-1}^{1} P(k) \times Q(k)$.
   Montrer que l'application φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Écrire en Python une fonction renvoyant la valeur de $\varphi(P_i, P_j)$ en fonction des paramètres entiers i et j.

5. $\mathscr{B}$ est-elle une base orthonormée (relativement à φ) de $\mathbb{R}_2[X]$?

6. À partir de $\mathscr{B}$, construire une base orthonormée de $(\mathbb{R}_2[X], \varphi)$.

7. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par P_1 et P_2.
   Déterminer la distance du polynôme X^2 à H puis la distance de 1 à H.

Indications :

1. C'est du cours.

2. Méthode usuelle : puisque la famille contient le « bon » nombre d'éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre.

3. Classique, attention comme toujours à bien justifier le caractère défini : ici il s'agit de polynômes donc c'est sûrement une histoire de racines.

4. Trouver d'abord une expression de P_i en fonction de i valable pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

5. Calculer la norme d'un vecteur ou le produit scalaire de deux d'entre eux.

6. Gram-Schmidt.

7. Pour X^2, observer qu'il s'écrit comme combinaison linéaire de P_1 et P_2.
   Pour 1, passer par un projeté orthogonal.

Exercice 8.

Un message doit transiter par un certain nombre de personnes. Chaque personne est susceptible de transmettre le message fidèlement à la suivante, soit de mentir et de lui transmettre son exact contraire. La probabilité qu'une personne mente est notée $p \in]0\,;1[$. On suppose que les personnes ne se concertent pas entre elles. On note p_n la probabilité que le message transmis par la n^e personne soit identique au message initial. On conviendra que $p_0 = 1$.

1. a) Proposer une fonction Python d'en-tête `chaine(n,p)` qui simule la réalisation de n transmissions, n étant un entier naturel non nul fourni en paramètre et p la probabilité définie dans l'énoncé. Elle renverra 1 si le message transmis par la n^e personne est identique au message initial et 0 sinon.

   b) On répète N chaînes de mêmes paramètres n et p. À l'aide de la fonction précédente, proposer une fonction d'en-tête `simul(N,n,p)` qui renvoie la proportion de messages correctement transmis par la n^e personne au cours de N réalisations de cette même chaîne.

   Tester la fonction pour différentes valeurs de p (on pourra prendre $n = 200$ et $N = 3000$). Que constate-on ?

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} = p + (1 - 2p)p_n.$$

3. a) Trouver un réel x tel que $x = p + (1 - 2p)x$.

   b) Montrer que la suite u de terme général $u_n = p_n - x$ est géométrique.

   c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter et commenter.

Indications :

1. a) Pour simuler la transmission du message avec probabilité p, on peut utiliser la fonction `random()` du module `random` qui renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.

   b) Il suffit d'appeler N fois la fonction précédente et de comptabiliser le nombre de « bonnes » transmissions.

2. Penser à préciser le système complet d'événements utilisé et définir lesdits événements.

3. a) Sans difficulté.

   b) Méthode classique : il faut utiliser les relations des questions 2 et 3a.

   c) On trouve d'abord l'expression de u_n car u est géométrique puis on en déduit p_n via la relation donnée en 3b.

4. Bien justifier le calcul de la limite.

Exercice 9.

Vous disposez d'une trousse contenant 10 stylos dont un seul fonctionne.

1. Vous les essayez l'un après l'autre jusqu'à trouver celui qui fonctionne. Combien devrez-vous effectuer d'essais de stylos en moyenne ?

2. Même question si l'on suppose qu'à un chaque essai infructueux, vous remettez (à tort) le stylo dans la trousse et que vous tirez au hasard le nouveau.

3. Vous en essayez un (au hasard), puis s'il y a échec, un deuxième puis, s'il y a échec, vous remettez le premier et vous tirez (au hasard) un troisième puis, s'il y a échec, vous remettez le deuxième et vous tirez (au hasard) un quatrième, puis…

   Combien devrez-vous effectuer d'essais de stylo en moyenne pour trouver le bon ?

4. a) Proposer dans chacune des trois situations, une fonction Python d'en-tête `simul_1(s)` (pour la première puis `simul_2(s)` et `simul_3(s)` pour le suivantes) renvoyant le nombre d'essais nécessaires à la découverte du bon stylo, `s` étant le nombre de stylos (ici 10).

   b) À l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction `esp(N, s)` qui fournit la moyenne du nombre d'essais nécessaires au cours de `N` réalisations de la même expérience où `s` correspond au nombre de stylos. Confronter les résultats expérimentaux aux valeurs trouvées dans les questions précédentes.

Indications :

Tout d'abord bien lire l'énoncé (j'ai laissé celui de CCP dans son jus, il est loin d'être parfaitement rédigé, il faut parfois faire avec) et ne pas hésiter à le résumer à l'aide d'un schéma ou tout autre représentation qui peut vous aider et éclaircir vos dires face à l'examinateur.

Ensuite, introduire les objets nécessaires pour le mathématiser. Par exemple on définit, pour k un entier entre 1 et 10, l'événement S_k : « le k-ème stylo testé fonctionne » ainsi que la variable aléatoire X égale au nombre de stylos testés pour obtenir le « bon » stylo.

1. La formulation « en moyenne » incite à calculer une espérance. Pour ce faire, il faut d'abord déterminer la loi de X, *i.e.* donner les valeurs possibles et la probabilité de chacune d'elle.

2. Idem (en reconnaissant une loi usuelle).

3. Idem.

4. a) Il s'agit de simuler les tirages de stylos, le plus simple est de commencer par le second cas.

   Pour simuler la réalisation ou non d'un événement qui a une probabilité p de se produire, on peut utiliser `random() < p` où la fonction `random` (qui provient de la bibliothèque du même nom) renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.

   b) C'est un simple calcul de somme.

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, l'exercice s'intéresse à l'inversibilité de la matrice carrée d'ordre n :

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

On considérera également $\Delta_n(x) = \det(M_n(x))$.

1. a) Démontrer que $M_1(x)$ et $M_2(x)$ sont inversibles pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) À l'aide de l'outil informatique, comparer la fonction Δ_4 et la fonction $x \mapsto 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$.
   c) Émettre une conjecture sur la forme de $\Delta_n(x)$.
2. Établir une relation de récurrence liant $\Delta_{n+2}(x)$, $\Delta_{n+1}(x)$ et $\Delta_n(x)$.
3. Démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_n(x)$ est-elle inversible ?
5. Pour cette question on considère que $x \in \mathbb{C}$.
   a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_1(x)$ n'est pas inversible ?
   b) Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_2(x)$ n'est pas inversible ?
   c) Généraliser les résultats précédents pour déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{C}$ la matrice $M_n(x)$ est inversible.

Indications :

1. a) Le sujet suggère fortement de passer par le déterminant.
   b) Tracer les deux fonctions sur un intervalle de votre choix.
   c) Trouver le motif commun aux trois résultats précédents.
2. Comme il s'agit de déterminants de tailles différentes, il faut effectuer des développements selon une ligne ou une colonne.
3. Étant donné la relation précédente, utiliser une récurrence double.
4. Conséquence du résultat précédent.
5. a) Reprendre les calculs de 1a mais résoudre sur $\mathbb{C}$.
   b) Poser $Y = x^2$ puis mettre les solutions trouvées sous forme exponentielle pour revenir à x.
   c) Reprendre le résultat de 3 et trouver une autre écriture de la somme pour se ramener à des racines de l'unité.